表と裏に相異なるとは限らない整数が 1 つずつ書かれたカードが 100 枚あります。

1 以上 100 以下の各整数がちょうど 2 回ずつ書かれていることは分かっていますが、各カードの表と裏の整数の対応は分かりません。ここで、1 枚カードを選んでひっくり返す行為を「操作」と呼ぶことにします。

今、すべてのカードが表を上にして並べられています。

(1) 各カードの表と裏の整数の対応によらず、必ず有限回の操作で、上になっている面の整数が相異なるようにできることを示してください。

(2) 各カードの表と裏の整数の対応によらず、必ず N 回以内の操作で、上になっている面の整数が相異なるようにできるとします。N の最小値を求めてください。

(3) 自由に問題を拡張して議論してください。

ただし、上になっている面の整数のみ見ることができるものとし、操作を行う前は表の整数のみしか分からず、以降は、一度でも操作を行ったカードの表と裏の整数の対応は覚えておけるものとします。

問題 (1) 解答

まず、100 枚のカードを 1 回ずつひっくり返すことで、カードの表と裏に書かれている整数の情報をすべて得ることができます。

次に、1 以上 100 以下の各整数が振られた 100 個の頂点と、各カードの表と裏に書かれている整数が振られた頂点を結ぶ 100 本の辺からなる無向グラフを考えます。[1] このグラフのすべての頂点の次数は 2 であるため、このグラフはいくつかのサイクルに分かれます。

各サイクルに対して周回する向きを定め、すべてのカードに対し、必要に応じて操作を行い対応する辺の始点側の頂点に振られた整数を上にすれば、有限回の操作で上になっている面の整数が相異なるようにできます。

[1] 表と裏に書かれている整数が同じときは、両端点が同じ頂点である辺（ループ）になります。

問題 (2) 解説

以降、すべてのカードが表を上にして並べられていて裏に書かれた整数をまだ見ていない最初の状態を「初期状態」、上になっている面の整数が相異なる状態を「良い状態」と呼ぶことにします。

問題 (1) より、任意の初期状態に対して、有限回の操作で良い状態にすることができることが分かりました。また、ある良い状態を考え、各カードの上になっている面を A 面、そうでない面を B 面と呼ぶことにすれば、100 枚のカードの A 面の整数は相異なり、B 面の整数も相異なります。

よって、100 回の操作ですべてのカードを 1 回ずつひっくり返してカードに書かれている整数をすべて確認し、各カードの A 面・B 面を定めた後、その状態から、すべてのカードの A 面を上にするか、すべてのカードの B 面を上にするかのいずれか 50 回以内の操作でできる方を行えば、合計 150 回以内の操作で良い状態にすることができます。

また、初期状態から 99 枚のカードをひっくり返せば、残りの 1 枚のカードの裏に書かれている整数は見なくても分かるので、合計 149 回以内の操作で良い状態にすることができます。

では、手順を工夫することで、149 回より少ない回数の操作で確実に良い状態にすることはできるでしょうか。

結論を先に言うと N の最小値は 148 なのですが、以下の証明では、任意の初期状態に対して必ず 148 回以内の操作で良い状態にできる手順と、最善を尽くしても 148 回以上の操作が必要になる可能性がある初期状態[2]をそれぞれ例示します。

[2]つまり、どのような戦略を取ったとしても、（裏に書かれている整数が）運の悪いケースでは 148 回以上の操作が必要になる初期状態のことです。

問題 (2) 解答

N の最小値が 148 であることを、任意の初期状態に対して必ず 148 回以内の操作で良い状態にできる手順と、最善を尽くしても 148 回以上の操作が必要になる可能性がある初期状態をそれぞれ例示することで示します。

任意の初期状態に対して 148 回以内の操作で良い状態にできる手順

まず、以下の「処理 1」を可能な限り行います。

処理 1：
上になっている面の整数が同じで、まだ一度も操作されていない 2 枚のカードがあるとき、一方をひっくり返す。新たに上になった面の整数と同じ整数が上になっているカードであって、まだ一度も操作されていないカードがあればひっくり返す。
以下、同様に、新たに上になった面の整数と同じ整数が上になっているカードであって、まだ一度も操作されていないカードがあればひっくり返すことを、可能な限り繰り返す。

すると、図 1 のように、1 回の「処理 1」に対して、対応するカードの列が 1 つできます。ここで、「処理 1」に関与しなかったカードも単独で列をなすと考えれば、すべてのカードがちょうど 1 つの列に属することになります。

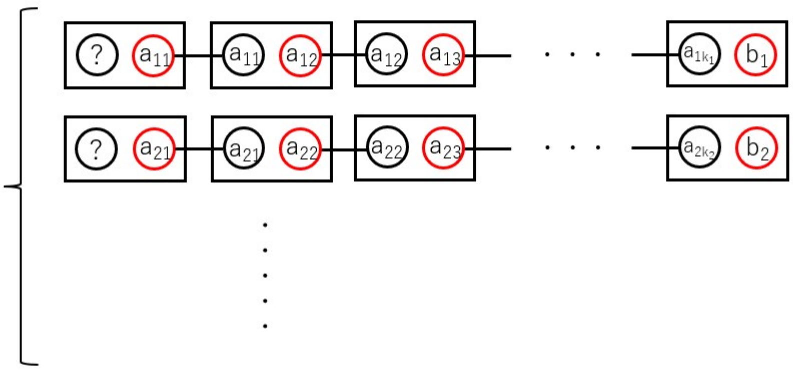

図 1 ：1 回の「処理 1」で 1 つの列ができる。
四角で囲まれた整数のペアが 1 枚のカードを表し、赤丸で囲まれた整数が「処理 1」後に上になっていることを表すものとする。また、列内で隣り合う 2 枚のカードに共通して書かれている整数を線分で結んで表す。
各列の最も左のカードのみ 1 回も操作されておらず、下になっている面の整数は分からない。

「処理 1」を可能な限り行った段階で 1 列しかできないときは、ここまでの 99 回の操作で既に良い状態となっているため、2 列以上できるときを考えます。

続けて、以下の「処理 2」を可能な限り行います（図 2 参照)。[3]

処理 2：
3 列以上残っているとき、右端の整数が同じ列があれば、一方の列を左右反転して
もう一方の列の右につなげる。これにより右端の整数が見えていない整数になるが、
右端に相当するカードをひっくり返して右端の整数の情報を得る。

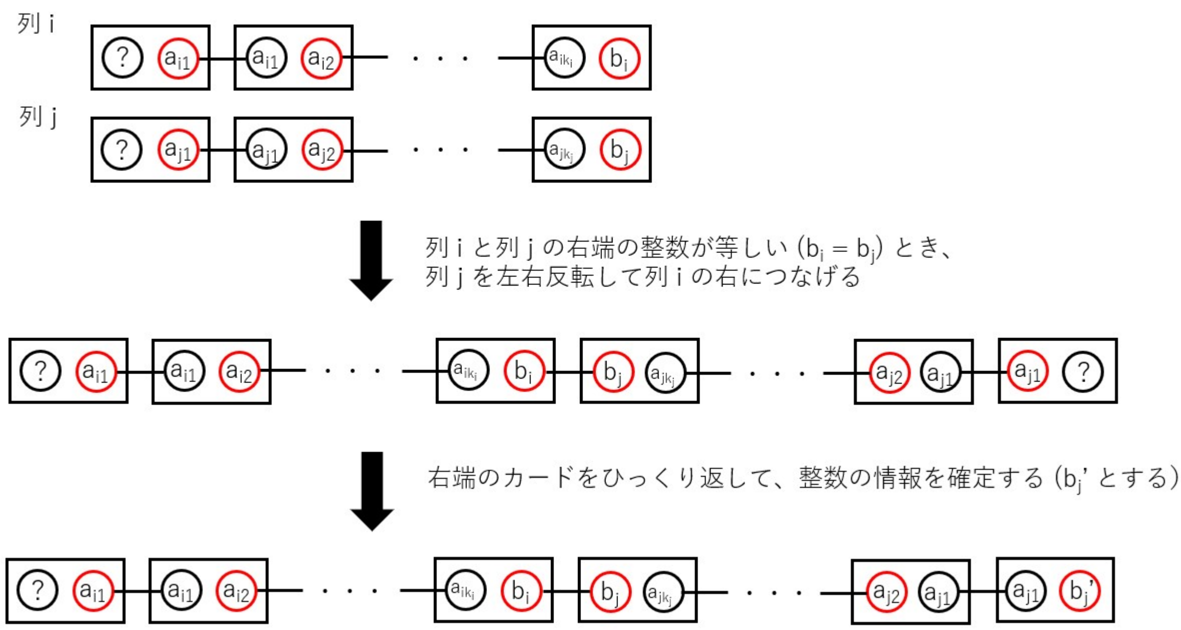

図 2 ：「処理 2」

右端の整数が同じ列がなくなるか、もしくは残り 2 列になるまで「処理 2」は繰り返されます。
「処理 2」の繰り返しが終了するまでの操作の回数は (100 - 残っている列数) 回です。
繰り返しが終了する条件によって、以下の (i), (ii) で場合分けします。

(i) 右端の整数が同じ列がなくなったとき
各列の右端の整数はすべて異なり、両端以外の整数はすべて 2 個ずつ組になっているため、
各列の左端の整数の集合と各列の右端の整数の集合は等しくなります。
よって、「右側をすべて上にする」「左側をすべて上にする」のいずれか 50 回以下の操作で
できる方を行えば、合計 148 回以内の操作で良い状態にできます。

(ii) 右端の整数が同じ 2 列が残ったとき
両端以外の整数はすべて 2 個ずつ組になっているため、左端の 2 つの整数も同じです。
そのため、左端の整数が分かり、ここまでの 98 回の操作ですべてのカードに書かれた整数
の情報が確定します。よって、148 回以内の操作で良い状態にできます。[4]

以上より、任意の初期状態に対して必ず 148 回以内の操作で良い状態にできる手順の存在が示されました。

[3] 1 回の「処理 2」で列数が 1 つ減ります。
[4] 解説で触れたように、カードに書かれたすべての整数の情報を確定した後、各カードの A 面・B 面を定め、すべて A 面を上にするか、すべて B 面を上にするかのいずれか 50 回以内の操作でできる方を行います。

任意の初期状態に対して 148 回以内の操作で良い状態にできる手順（別解）

任意の初期状態に対して 148 回以内の操作で良い状態にできる手順が存在することは、帰納法を用いても簡潔に示すことができます。

ここでは、一般に 1 以上 $2m$ 以下（m は正整数）の各整数がちょうど 2 回ずつ書かれた $2m$ 枚のカードがあるとき、$(3m-2)$ 回以内の操作で良い状態にできる手順があることを帰納法で示します。

$m=1$ のときは、初期状態が良い状態ではない、つまり 2 枚のカードの上になっている面の整数が同じとき、一方のカードをひっくり返せば、$3m-2=1$ 回の操作で良い状態にできます。

$m=k$ のとき任意の初期状態に対して $(3m-2)$ 回以内の操作で良い状態にできると仮定し、$m=k+1$ のときを考えます。初期状態が良い状態ではないとき、上になっている面の整数で同じものが存在するため、この整数を a とおきます。まず、上になっている面の整数が a である 2 枚をひっくり返します。このとき、この 2 枚のカードの裏に書かれた整数が同じか異なるかで、以下の (i), (ii) の場合分けをします。

(i) 裏に書かれた整数が同じとき

この 2 枚を除いた $2k$ 枚のカードには k 種類の整数が 2 回ずつ書かれているため、帰納法の仮定より、この $2k$ 枚のカードに対しては $(3k-2)$ 回以内の操作で上になっている面の整数が相異なる状態にできます。
さらに、最初にひっくり返したカード 2 枚のうち一方を再度ひっくり返すことで、
$(2k+2)$ 枚のカードに対して、$2+(3k-2)+1=3(k+1)-2$ 回以内の操作で良い状態にできます。

(ii) 裏に書かれた整数が異なるとき

裏に書かれた整数を b, c とします。この 2 枚を除いた $2k$ 枚のカードに関して、b と c を同じ整数と見なせば、(i) と同様に、帰納法の仮定より、この $2k$ 枚のカードに対しては
$(3k-2)$ 回以内の操作で上になっている面の整数が相異なる状態にできます。
このとき、上になっている整数に b があれば最初にひっくり返した 2 枚のうち b が上になっているカードを、上になっている整数に c があれば最初にひっくり返した 2 枚のうち c が上になっているカードを再度ひっくり返すことで、$(2k+2)$ 枚のカードに対して、
$2+(3k-2)+1=3(k+1)-2$ 回以内の操作で良い状態にできます。

よって、$m=k+1$ のときも、任意の初期状態に対して $(3m-2)$ 回以内の操作で良い状態にできます。

以上より、1 以上 $2m$ 以下（m は正整数）の各整数がちょうど 2 回ずつ書かれた $2m$ 枚のカードがあるとき、初期状態によらず、$(3m-2)$ 回以内の操作で良い状態にできることが示されました。

どのような戦略を取っても 148 回以上の操作が必要になる可能性がある初期状態

$1, 2, \cdots, 50$ が表に書かれているカードが 2 枚ずつある初期状態を考えます。

この初期状態から始めて良い状態にするためには、$i \ \ (1 \leqq i \leqq 50)$ が表に書かれている 2 枚のカードのうち一方に対して奇数回、もう一方に関して偶数回の操作を行う必要があります。また、良い状態にするために、必ず 100 が書かれた面を上にする必要がありますが、初期状態ではどのカードの裏に 100 が書かれているか分からないため、最悪のケースでは 99 枚のカードに対して操作を 1 回以上行う必要があります。

これらを合わせて考えると、少なくとも 50 枚のカードに対して 1 回以上の操作、それ以外の 49 枚のカードに対して 2 回以上の操作を行う必要があり、計 148 回以上の操作が必要になります。

以上より、求める N の最小値は 148 であることが示されました。

問題 (3)

様々な拡張をいただきましたが、その中から 1 つ、金賞受賞者による拡張を紹介します。

この拡張は、「$\sum_{i=1}^{M} a_i$ 枚のカードがあり、1 以上 M 以下の各整数 i について i がちょうど $2a_i$ 回書かれている（$M, a_1, a_2, \cdots, a_M$ は正整数)」という設定のときに、各整数 i に対し i が上になっているカードが a_i 枚である状態にするために必要な操作の回数を見積もるもので、特に $a_1 = a_2 = \cdots = a_M$ のときについて、操作の回数を上下から抑える考察を行っていました。

現時点では完全には解明されていませんが、今後の研究課題といえます。