解説

交点の個数は有限ですので、円周上に取る点を順番を変えずに、位置をずらすことによって、3 つの線分が 1 点で交わることがないようにできます。以下では、3 つの線分が 1 点で交わることがないときのみ考えます。

線分の交点の個数は、円周上の点の間隔にはよらず、点を結ぶ順番のみによることに注意してください。

P_{k-1} から P_k へ円周上を時計回りにたどったときの順番を a_k 番目と表すこととします。($1 \leqq k \leqq n$、ただし、P_0 は P_n を指すこととします)

まず、n が奇数のときを考えます。

すべての線分に対して、その線分と円周上以外で交差する線分は $(n-3)$ 本以下ですので、図 1 のように、$a_k = \frac{n-1}{2}$ $(1 \leqq k \leqq n)$ であり、すべての線分が $(n-3)$ 本の線分と交差するような点の結び方のとき、交点数は最大値 $\frac{n(n-3)}{2}$ をとります。

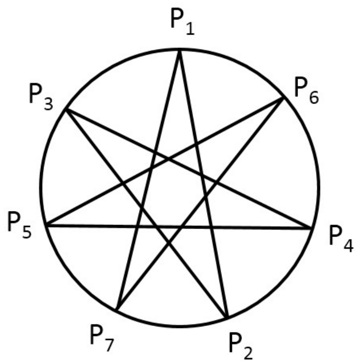

図 1: n=7 の例

では、n が偶数のときはどうでしょうか。奇数のときのようにすべての線分が $(n-3)$ 本の他の線分と交差するように点を結ぶことはできません。結論から言うと、2 本の線分のみ $(n-3)$ 本の他の線分と交差し、残り $(n-2)$ 本の線分は $(n-4)$ 本の線分と交差するような点の結び方が存在し、このときの交点数 $\frac{n(n-4)}{2}+1$ が最大となるのですが、発見するのは意外と難しいと思います。

以下の解答では、前半で、実際に交点の個数が $\frac{n(n-4)}{2}+1$ 個になるような点の結び方の例を挙げ、後半で、交点の個数が $\frac{n(n-4)}{2}+2$ 個以上になるような点の結び方が存在しないことを示します。

解答

n が偶数のときについて交点の個数の最大値が $\frac{n(n-4)}{2}+1$ 個であることを証明します。

まず、交点の個数が $\frac{n(n-4)}{2}+1$ 個であるような実例を構成します。

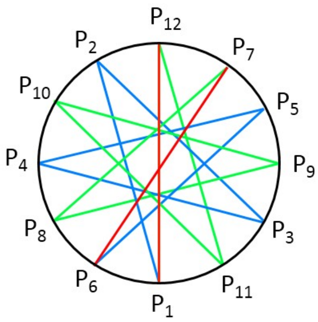

図 2: n=12 の例

図 2 のように、

$$
\begin{aligned}
a_1 &= a_{\frac{n}{2}+1} = \frac{n}{2} && (1)\\
a_2 &= a_3 = \cdots = a_{\frac{n}{2}} = \frac{n}{2}-1 && (2)\\
a_{\frac{n}{2}+1} &= a_{\frac{n}{2}+2} = \cdots = a_n = \frac{n}{2}+1 && (3)
\end{aligned}
$$

となるように点を結ぶと、(1) に対応する線分（図 2 の赤い線分）は他の $(n-3)$ の線分と交差し、(2) に対応する線分（図 2 の青い線分）と (3) に対応する線分（図 2 の緑の線分）は他の $(n-4)$ の線分と交差するので、交点の個数は $\frac{n(n-4)}{2}+1$ 個になります。

次に、交点の個数が $\frac{n(n-4)}{2}+2$ 個以上になるような点の結び方は存在しないことを、以下の補題を示すことによって証明します。ここで、自分自身および両隣の線分を除く $(n-3)$ 本すべての線分と交差する線分を「良い線分」と呼ぶことにします。

補題 1

n が偶数のとき良い線分は隣り合わない。

補題 1 の証明

隣り合った良い線分があるとして矛盾を導きます。

図 3 のように隣り合った線分 $P_{k-1}P_k$ と P_kP_{k+1} がともに良い線分であるとします。また、点 P_{k-1}, P_k, P_{k+1} で分けられた円周の弧をそれぞれ弧 A, B, C とします。

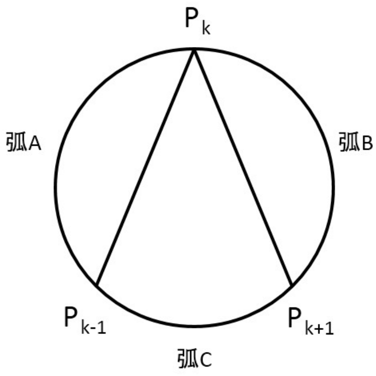

図 3: 隣り合った良い線分

すべての線分が良い線分 $P_{k-1}P_k, P_kP_{k+1}$ の隣であるかまたは交差することから、点を結ぶ順番は、

P_k → P_{k+1} → 弧 A 上の点 → 弧 B 上の点 → 弧 A 上の点 → 弧 B 上の点 → $\cdots$ →弧 A 上の点 → 弧 B 上の点 → P_{k-1} → P_k

である必要がありますが、これは n が偶数であることに矛盾します。

補題 2

n が偶数のとき良い線分は 3 本以上存在しない。

補題 2 の証明

良い線分が 3 本以上存在するとして矛盾を導きます。

補題 1 より、良い線分は隣り合わず、また自分自身および両隣の線分以外のすべての線分と交差するので、良い線分のうち 3 本は、図 4 のような配置になります。

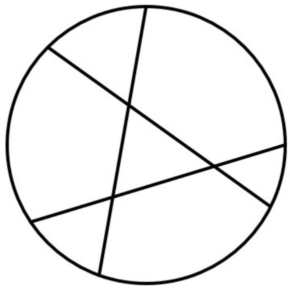

図 4: 3 本の良い線分

図 4 のような 3 本の良い線分の端点が、点を結んだときに出てくる順番を、
$\cdots \to P_a \to P_b \to \cdots \to P_c \to P_d \to \cdots \to P_e \to P_f \to \cdots$
とすると、その配置は図 5 の 4 通りが考えられます。

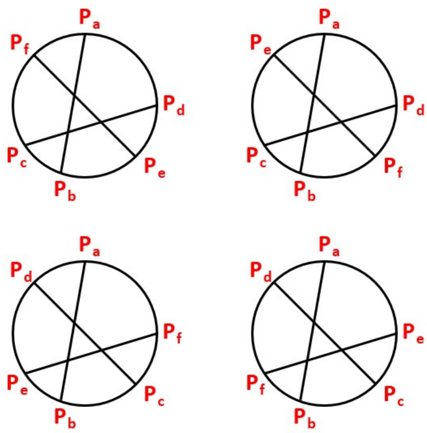

図 5: 3 本の良い線分を結ぶ順番

図 5 の左上の配置のとき、点を結んだときに P_b と P_c の間にある線分はすべて線分 P_eP_f と交差するので偶数本、P_d と P_e の間にある線分はすべて線分 P_aP_b と交差するので偶数本、P_f と P_a の間にある線分はすべて線分 P_cP_d と交差するので偶数本となります。

図 5 の左下の配置のときも同様です。

図 5 の右上の配置のとき、点を結んだときに P_b と P_c の間にある線分はすべて線分 P_eP_f と交差するので偶数本、P_d と P_e の間にある線分はすべて線分 P_aP_b と交差するので奇数本、P_f と P_a の間にある線分はすべて線分 P_cP_d と交差するので奇数本となります。

図 5 の右下の配置のときも同様です。

以上より、図 5 のいずれの配置のときも、n が偶数であることに矛盾します。

補題 2 より、n が偶数のとき交点の個数が $\frac{n(n-4)}{2}+2$ 個以上になることがないことが示されました。
以上より、$S(100)=\frac{100\times 96}{2}+1=4801$ です。

別解

n が偶数のとき交点の個数が $\frac{n(n-4)}{2}+2$ 個以上になることがないことの証明は以下のように行うこともできます。
まず、各線分に対して、対面を結ぶ状態からの「ずれ」のような値 $b_k(1 \leqq k \leqq n)$ を以下のように定義します。

$$b_k=\left|a_k-\frac{n}{2}\right| \tag{4}$$

b_k に対応する線分と他の線分との交点の最大数は、$b_k=0$ のとき $(n-3)$ 個、$b_k \neq 0$ のとき $2(\frac{n}{2}-b_k-1)=n-2b_k-2$ 個です。つまり、

$$\begin{aligned} &n-2b_k-3 \text{ 個（}b_k=0\text{）} \\ &n-2b_k-2 \text{ 個（}b_k\neq 0\text{）} \end{aligned} \tag{5}$$

です。
ここで、点 $P_1,P_3,\cdots,P_{n-1}$ を「奇点」、$P_2,P_4,\cdots,P_n$ を「偶点」と呼ぶことにします。円周上で隣り合った奇点と偶点が必ず存在するので、その奇点と偶点の組を (P_{c_1},P_{c_2}) とします。このとき、例えば $c_1<c_2$ であれば、t_1,t_2 を非負整数として、

$$\sum_{k=c_1+1}^{c_2} a_k=t_1 n\pm 1 \tag{6}$$

$$\sum_{k=c_2+1}^{n} a_k+\sum_{k=1}^{c_1} a_k=t_2 n\mp 1 \tag{7}$$

となります。式 (6) の左辺が奇数個の和であることに注意すると、式 (4) より、

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=c_1+1}^{c_2} b_k &= \sum_{k=c_1+1}^{c_2} \left| a_k - \frac{n}{2} \right| \\
&\geqq \sum_{k=c_1+1}^{c_2} a_k - \sum_{k=c_1+1}^{c_2} \frac{n}{2} \\
&\geqq \frac{n}{2} - 1
\end{aligned} \tag{8}
$$

ただし、式 (8) **の** 2 **行目から** 3 **行目の変形には、**
式 (6) **より、**
(2 行目の第 1 項) $\equiv \pm\ 1\ (mod\ n)$
および、奇数個の和であることから、
(2 行目の第 2 項) $\equiv\ \frac{n}{2}\ (mod\ n)$
を用いています。
同様に式 (7) **の左辺が奇数個の和であることから、**

$$
\sum_{k=c_2+1}^{n} b_k + \sum_{k=1}^{c_1} b_k \ \geqq\ \frac{n}{2} - 1 \tag{9}
$$

式 (8) **と 式** (9) **を合わせて、**

$$
\sum_{k=1}^{n} b_k \ \geqq\ n - 2 \tag{10}
$$

となります。（$c_2 < c_1$ **のときも同様に式** (10) **が成り立ちます）**

式 (5) **より、**b_k **の総和が決まっているとき** $b_k = 0$ **となる** k **の個数が少ないほど交点数の上限は大きく、また** b_k **が小さいほどその上限は大きくなるので、式** (10) **より、**$b_k = 0$ **となる** k **が** 2 **個、**$b_k = 1$ **となる** k **が** $(n-2)$ **個のとき、交点数の上限は最大値**

$$
\frac{1}{2}\left[2(n-3) + (n-2)(n-4)\right] = \frac{n(n-4)}{2} + 1
$$

をとります。

以上より、n **が偶数のとき交点の個数が** $\frac{n(n-4)}{2} + 2$ **個以上になることがないことが示されました。**